Домашно №3, Задача 2 по Алгебра 2 на Компютърни Науки

Камен Димитров Младенов, Група 6

31 Май 2023

Решение

$\gcd(1,-1,-2,1,-7,10) = \pm 1 \implies f(x)$ е примитивен, то тогава той е разложим над $\mathbb{Q} \iff$ е разложим над $\mathbb{Z}$. Ще разгледаме съществено разлагане $f(x) = f_1(x)f_2(x) \quad f_1, f_2 \in \mathbb{Z}[x]$:

$5 = \deg(f) = \deg(f_1) + \deg(f_2), \quad 0 < \deg(f_1), \quad \deg(f_2) < \deg(f) \quad$ Б.О.О. $\deg(f_1) \leq \deg(f_2)$

Тогава $\deg(f_1) = 1, \deg(f_2) = 4$ или $\deg(f_1) = 2, \deg(f_2) = 3$. Ще разгледаме първата възможност.

$f_1(x) = x - r_1,\ r_1 \in \mathbb{Z} \quad r_1$ е делител на свободния член $\implies r_1 \in \{-10,-5,-2,-1,1,2,5,10\}$

Избираме $r_1 = 2$ и проверяваме по правилото на Хорнер :

	1	−1	−2	1	−7	10
2	1	1	0	1	−5	0

Следователно $f(x) = (x-2)(x^4 + x^3 + x - 5)$. Задачата се свежда до разлагане на полинома $f_2(x) = x^4 + x^3 + x - 5 \in \mathbb{Z}[x]$

$\gcd(1,-5) = \pm 1 \implies f_2(x)$ е примитивен и той е разложим над $\mathbb{Q} \iff$ е разложим над $\mathbb{Z}$. Ще разгледаме съществено разлагане $f_2(x) = f_3(x)f_4(x) \quad f_3, f_4 \in \mathbb{Z}[x]$

$4 = \deg(f_2) = \deg(f_3) + \deg(f_4) \quad 0 \leq \deg(f_3), \deg(f_4) < \deg(f_2) \quad$ Б.О.О. $\deg(f_3) \leq \deg(f_4)$

Тогава $\deg(f_3) = 1, \deg(f_4) = 3$ или $\deg(f_3) = \deg(f_4) = 2$. Ще разгледаме първата възможност.

$f_3(x) = x - r_2,\ r_2 \in \mathbb{Z} \quad r_2$ е делител на свободния член $\implies r_2 \in \{-5,-1,1,5\}$

Пресмятаме по правилото на Хорнер:

	1	1	0	1	−5
−5	1	−4	20	−99	490
−1	1	0	0	1	−6
1	1	2	2	3	−2
5	1	6	30	151	750

Следователно $f_2(x)$ няма рационални корени и е неразложим над $\mathbb{Q}$.

Тоест, $f(x) = (x-2)(x^4+x^3+x-5)$ е разлагането на $f(x)$ в произведение на неразложими множители над $\mathbb{Q}$.